2011 年 2 月 纯粹数学与应用数学 Feb. 2011
第 27 卷 第 1 期 Pure and Applied Mathematics Vol. 27 No. 1

三角格上的 σ 全一问题

平征 [1], 钱建国 [2], 林启法 [1]

(1. 宁德师范学院数学系, 福建 宁德 352100; 2. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 主要研究三角格上的 σ 全一问题. 应用图论知识, 利用数学归纳法, 分别给出了以三角形, 菱形 (四边形) 和正六边形为边界的三角格上的 σ 全一问题无解的充要条件, 并在证明中给出有解情况下详细解的刻画.

关键词: σ 全一问题; 偶等价覆盖; 奇集合; 三角格

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-5513(2011)01-0107-09

1 背景介绍和基本结果

考虑这样一个 $n\times n$ 棋盘: 在棋盘上的每一个方格上安装一个指示灯和一个按钮. 如果按下某个方格上的按钮, 则该方格及其边相邻方格上的灯将从 ‘灭’ 到 ‘亮’, 反之亦然. 假设开始时所有的灯是灭的. 我们要研究的问题是: 是否有可能按下一系列的按钮使得最后所有的灯都亮起来么? 这就是由文献 [1] 最先引入的 σ^+ 全一问题 (文献 [2] 也提出该问题的一个等价描述). 与上述棋盘上的 σ^+ 全一问题不同, 如果一个按钮仅仅点亮它的边相邻方格上的灯而不点亮自己方格上的灯, 这种规则称为 σ 规则, 在此规则下的相应的问题称为 σ 全一问题. σ^+ 全一问题可以推广至对任意图提出: 图上每个顶点安有一个指示灯和一个按钮, 如果按下某个顶点上的按钮, 则该点及其邻点上的灯将从 ‘灭’ 到 ‘亮’, 反之亦然. 根据这个定义, 简单图上的 σ^+ 规则等价于在图上的每一个顶点加上自环情况下的 σ 规则. 由于这个原因, 在下面我们仅讨论 σ 规则下的结果, 即只讨论 σ 全一问题的解.σ 全一问题的解类似于 σ^+ 全一问题的解是指使得图上所有灯亮起来的一组按钮.

在先前的文献中,σ^+ 全一问题得到了广泛地研究. 如，应用代数和图论的知识, 文献 [3-5] 等证明:σ^+ 全一问题对于任何图来说其答案都是肯定的. 特别地, 文献 [6] 给出树的 σ^+ 全一问题解的一个充要条件. 不同于 σ^+ 全一问题, 很多图上的 σ 全一问题不一定有解, 即使是对于 C_3 或 P_5, 即一个三角形或 5 点的路这样一个比较简单的图. 在本文中我们将讨论几种不同边界下的三角格的 σ 全一问题无解的充要条件.

定义 1.1[3] 设 G 是一个图, 顶点集为 V, 边集为 E. 对一个子集 $P\subseteq V$, 如果 $\forall\, v\in V$, P 中与 v 顶点相邻的点的数目为偶数个, 即 $|\,N_P(v)\,|$ 为偶数, 则称 P 是 G 的一个偶等价覆盖.

定理 1.1[4] 图 G 的 σ 全一问题有解当且仅当 G 没有奇数势偶等价覆盖.

收稿日期: 2010-06-09.
基金项目: 国家自然科学基金 (10831001); 宁德师范学院科研基金 (2010308).
作者简介: 平征 (1980-), 硕士, 研究方向: 图论.

定义 1.2[8] 设图 $G=(V,E)$, 顶点集为 V, 边集为 E. 对一个子集 $X\subseteq V$, 如果 $\forall\, v\in V$, 且 X 中与 v 相邻的顶点为奇数个, 即 $|\, N_X(v)\,|$ 为奇数, 则称 X 是 G 的奇集合.

定理 1.2[8] 设 G 是一个图, 顶点集为 V, 边集为 E. 对 V 中的一个子集 $X\subseteq V$, X 是 G 的 σ 全一问题的一个解当且仅当 X 是奇集合.

2 以三角形为边界的三角格

一个以三角形为边界的三角格 $T(n)$ 是一个三角形的剖分, 如图 1 所示.

对于位于同一水平层的三角形的集合定义为以三角形为边界的三角格的 T- 三角层, 如图 1 所示按从顶部到底部的顺序记为 $\{L_1,L_2,\cdots,L_n\}$.

顶点层的定义类似, 即对于位于同一水平层顶点的集合定义为以三角形为边界的三角格的 T- 顶点层, 以三角形为边界的三角格的 T- 顶点层共有 $n+1$ 层, 如图 1 所示按从顶部到底部的顺序记为 $\{l_1,l_2,\cdots,l_{n+1}\}$. 对于以三角形为边界的三角格, l_{ij} 为 (i,j) 位置上的顶点, 记 l_i 为第 i 层的顶点集. 从图 1 易知 $1\leq j\leq i$.

定理 2.1 以三角形为边界的三角格 $T(n)$ 的 σ 全一问题无解 $\Leftrightarrow$ (1) $n=4(k+1)$, 或 (2) $n=4k+1$, 或 (3) $n=4k+2$, $k\in\{0,1,2,\cdots\}$.

证明 由定理 1.1, 图 G 的 σ 全一问题有解当且仅当没有奇数势偶等价覆盖. 其逆否命题为 σ 全一问题无解当且仅当有奇数势偶等价覆盖.

注 文中定理证明图中的黑点分别标示奇数势偶等价覆盖 P 或奇集合 (解) X 中的点。

我们只需证明 $T(n)$ 有奇数势偶等价覆盖当且仅当 (1) 或 (2) 或 (3) 成立. 我们先来证明当 $n=4(k+1)$ 或 $n=4k+1$ 时 $T(n)$ 有奇数势偶等价覆盖. 事实上当 $n=4(k+1)$, $T(n)$ 的顶点数为 $1+2+\cdots+n+(n+1)=(4k+4+1)(4k+4+2)/2=(4k+5)(2k+3)$. 当 $n=4k+1$ 时, $T(n)$ 的顶点数为 $1+2+\cdots+n+(n+1)=(4k+1+1)(4k+1+2)/2=(2k+1)(4k+3)$. 易知 $T(n)(n=4(k+1)$ 或 $n=4k+1)$ 的顶点数为奇数, $T(n)$ 中的顶点的度均为 2 或 4 或 6, 即 $T(n)$ 中的任何一个顶点都与偶数个顶点相邻, 不难验证 $T(n)$ 的全覆盖是一个奇数势偶等价覆盖.

接着, 我们证明当 $n=4k+2$ 时 $T(n)$ 同样有奇数势偶等价覆盖. 当 k 为偶数时, 则类似图 2 所示的偶等价覆盖 P. 易计算 $|P|=1+2+3+\cdots+n/2+(n/2+1)=(n/2+1)(n/2+2)/2=(2k+2)(2k+3)/2=(k+1)(2k+3)$ 为奇数, 即 P 是一个奇数势偶等价覆盖.

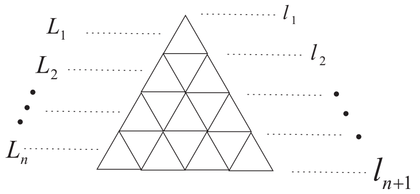


图 1 以三角形为边界的三角格 $T(n)$

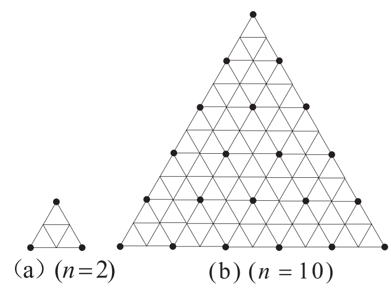


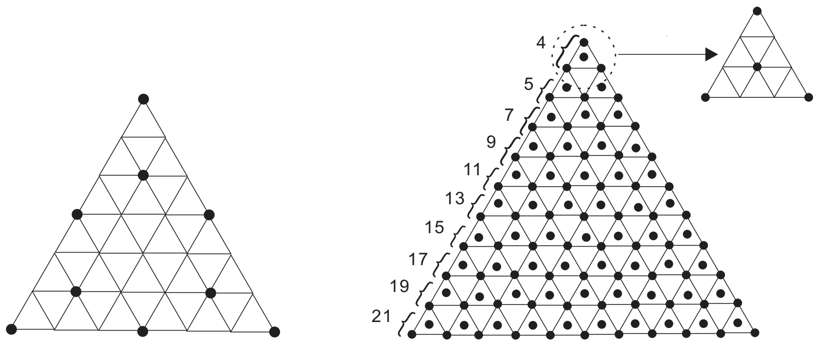
图 2 $T(n=4k+2)(k$ 为偶数) 的奇数势偶等价覆盖

当 k 为奇数时, 我们分三种情况讨论.

情况 1　$k=6m+1, m=0,1,2,\cdots$.

当 $k=6m+1$ 即 $n=3\times(8m+2)+0=3\times 8m+6$ 时, $T(n)$ 存在一个类似于图 3(b) 的奇数势偶等价覆盖 P_m. 我们可以由归纳得到结果.

首先, 当 $m=0$ 即 $k=1$ 即 $n=6$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_0 如图 3(a) 所示. $|P_0|=9=4+5$. 其次, 当 $m=1$ 即 $k=7$ 即 $n=30=3\times 8+6$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_1 如图 3(b) 所示. 我们可以看到它是在图 3(a) 的基础上加上 8 个三层 T- 三角层. 添加每三层的 T- 三角层, 在偶等价覆盖中是添上奇数个点. 8 个三层, 添加了偶数个点到偶等价覆盖中. $|P_1|=(4+5)+7+9+11+13+15+17+19+21=121$ 还是奇数. 依此类推, m 每增加 1, 则添加 8 个三层, 即在偶等价覆盖中添加偶数个顶点, 则对 $\forall k=6m+1, n=3\times 8m+6, m\in\{0,1,2\cdots\}$ 时 $T(n)$ 有奇数势偶等价覆盖 P_m 且 $|P_m|=(4+5)+7+9+11+13+\cdots+[n/3+(n/3+1)]=9+8m(7+16m+5)/2=9+4m(16m+12)$ 为奇数.



(a) $(n=6)$　　(b) $(n=30)$

图 3　$T(n=4k+2)(k=6m+1)$ 的奇数势偶等价覆盖

情况 2　$k=6m+3, m=0,1,2,\cdots$.

当 $k=6m+3$ 即 $n=3\times(8m+4)+2=3\times 8m+14$ 时, $T(n)$ 存在一个类似于图 4 的奇数势偶等价覆盖 P_m. 我们可以由归纳得到结果.

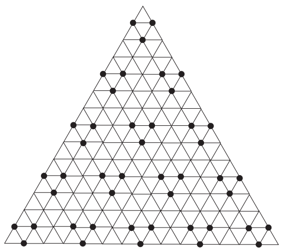
首先, 当 $m=0$ 即 $k=3$ 即 $n=14$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_0 如图 4 所示. $|P_0|=3+6+9+12+15=45$. 其次, 当 $m=1$ 即 $k=9$ 即 $n=38=3\times 12+2$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_1 类似如图 4 所示, 即在图 4 的基础上加上 8 个三层 T- 三角层, 每添加一层偶等价覆盖多一个三角形的点, 添加连续两个三层的 T- 三角层, 在偶等价覆盖中是添加了奇数个点. 8 个三层, 添加了偶数个点到偶等价覆盖中, 得到 $|P_1|=45+(6+7+8+9+10+11+12+13)\times 3=273$ 为奇数. 依此类推, 当 $k=6m+3$ 即 $n=3\times 8m+14$ 时 $T(n)$ 奇数势偶等价覆盖 P_m, 且 $|P_m|=1+2+\cdots+[(n-2)/3+1)\times 3=3(8m+5)(4m+3)$ 为奇数.

情况 3　$k=6m+5, m=0,1,2,\cdots$.

当 $k=6m+5$ 即 $n=3\times(8m+6)+4=3\times 8m+22$ 时, $T(n)$ 存在一个类似于图 5 的奇数势偶等价覆盖. 我们可以由归纳得到结果.

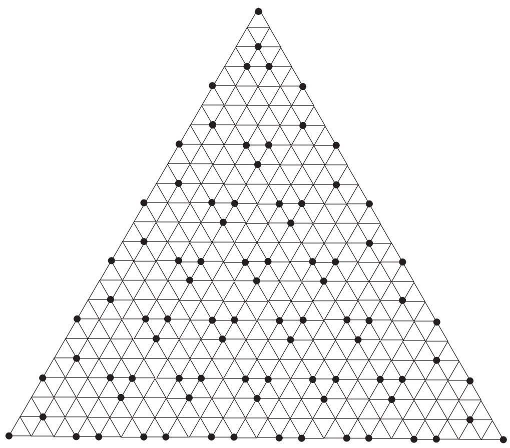
首先, 当 $m=0$ 即 $k=5$ 即 $n=22$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_0 如图 5 所示. $|P_0|=6+6+9+12+15+18+21=87$. 其次, 当 $m=1$ 即 $k=11$ 即 $n=46=3\times 14+4$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_1 类似如图 5 所示, $|P_1|=87+(24+27+30+33+36+39+42+45)=363$

为奇数. 我们可以看到它是在图 5 的基础上加上 8 个三层 T- 三角层. 添加连续两个三层的 T- 三角层, 在偶等价覆盖中是添加了奇数个点. 8 个三层, 添加了偶数个点到偶等价覆盖中. 因此 P_1 还是奇数. 依此类推, 当 $k = 6m + 5$ 即 $n = 3 \times 8m + 22$ 时 $T(n)$ 有奇数势偶等价覆盖 P_m, $|P_m| = 6 + (6 + 9 + 12 + \cdots + n - 1) = (4m + 3)(24m + 27) + 6$ 为奇数.



($n = 14$)

图 4 $T(n = 4k + 2)(k = 6m + 3)$ 的奇数势偶等价覆盖



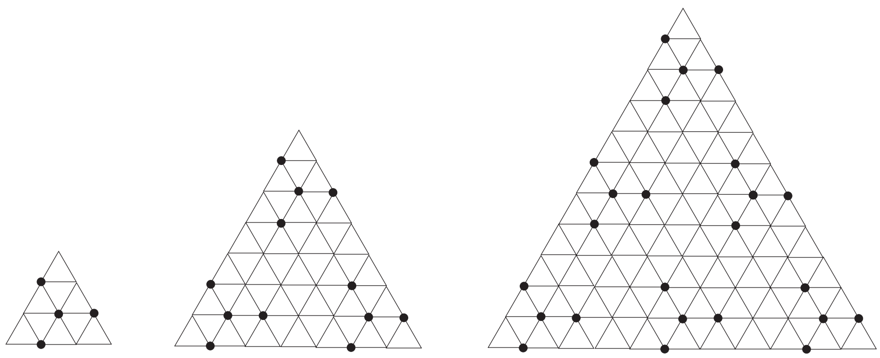
($n = 22$)

图 5 $T(n = 4k + 2)(k = 6m + 5)$ 的奇数势偶等价覆盖

最后, 当 $n = 4k + 3(k \in \{0, 1, 2, \cdots\})$ 时, 我们按 k 归纳得到 $T(n)$ 的奇集合 X_k, 由定理 1.2 可得 X_k 为其上的 σ 全一问题一个详细的解法.

当 $k = 0$ 即 $n = 3$ 时, $T(3)$ 的 σ 全一问题的一个解法 X_0 如图 6(a) 所示. 当 $k = 1$ 即 $n = 7$ 时, $T(7)$ 的 σ 全一问题的一个解法 X_1 如图 6(b) 所示. 类似的, 当 $k = 2$ 即 $n = 11$ 时, $T(11)$ 的 σ 全一问题的一个解法 X_2 如图 6(c) 所示. 可以观察 X_2 是在 X_1 的基础上拓展. 下面我们将证明 $T(n)(n = 4k + 3)$ 的 σ 全一问题有如图 6 所示的解法. 我们对 k 进行归纳证明.

当 $k \le h$ 时, $T(n)$ 的 σ 全一问题有解 X_k. 当 $k = h$ 时, 设 X_h 为 $T(4h + 3)$ 的解法. 当 $k = h + 1$, 即 $n = 4k + 3 = 4h + 7$, 我们可以从 X_h 得到 X_{h+1}. 在 $T(4h + 3)$ 的底部延拓四行可以得到 $T(4h + 7)$. $T(4h + 7)$ 有如类似于图 6 的解.



(a) ($n=3$, $k=0$) (b) ($n=7$, $k=1$) (c) ($n=11$, $k=2$)

图 6 $T(n = 4k + 3)$ 的解 X_k

3 以菱形 (四边形) 为边界的三角格

以菱形为边界的三角格 $D(n)$ 是如图 7 所示的菱形的一个剖分.

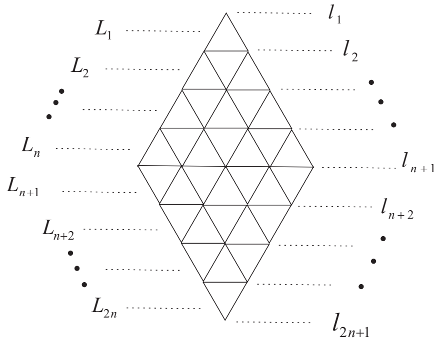


图 7 以菱形为边界的三角格 $D(n)$

以菱形为边界的三角格 $D(n)$ 的 D- 三角层是指在同一水平线上的三角形的集合. $D(n)$ 的 D- 三角层分别记为 $\{L_1, L_2, \cdots, L_n, L_{n+1}, \cdots, L_{2n}\}$, 如图 7 所示按从顶部到底部的顺序. $D(n)$ 的 D- 三角层数为 $2n$.

顶点层的定义类似, 即对于位于同一水平层顶点的集合定义为菱形边界的三角格的 D- 顶点层, 以菱形为边界的三角格的 D- 顶点层数为 $2n+1$. 如图所示按从顶部到底部的顺序记为 $\{l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1}, \cdots, l_{2n+1}\}$. 对于以菱形为边界的三角格, l_{ij} 为 (i,j) 位置上的顶点, 记 l_i 为第 i 层的顶点集. 从图 7 易知 $1 \le j \le i$ 当 $1 \le i \le n+1$ 和 $1 \le j \le 2n+1-i$ 当 $n+2 \le i \le 2n+1$.

定理 3.1 以菱形为边界的三角格 $D(n)$ 的 σ 全一问题无解 $\Leftrightarrow$

(1)$n = 2k+1$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ 或 (2)$n = 4m$,$m \in \{1, 2, \cdots\}$.

证明 由定理 1.1 的逆命题, 我们只需证明 $D(n)$ 有奇数势偶等价覆盖当且仅当 (1) 或 (2) 成立. 当 $n = 2k+1$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ 时, $D(n)$ 有奇数势偶等价覆盖. 我们可以由归纳得到结果.

当 $k = 0$ 即 $n = 1$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_0 如图 8(a) 所示. $|P_0| = 3$.

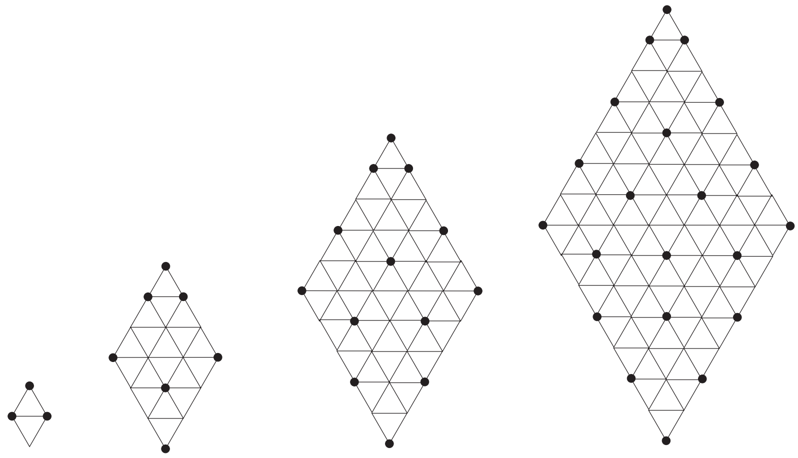
当 $k = 1$ 即 $n = 3$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_1 如图 8(b) 所示. $|P_1| = 7$.

当 $k = 2$ 即 $n = 5$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_2 如图 8(c) 所示. $|P_2| = 13$.

当 $k = 3$ 即 $n = 7$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_3 如图 8(d) 所示. $|P_3| = 21$.

我们可以从 $D(2k+1)$ 拓展得到 $D(2k+3)$ 的偶等价覆盖. 观察得 $P_k - P_{k-1} = n+1 = 2k+2$, 归纳得 $|P_k| = k^2 + 3k + 1 = (k+1)(k+2) + 1$ 为奇数.

接着, 我们来证明当 $n = 4m$, $m \in \{1, 2, \cdots\}$ 时 $D(n)$ 同样也存在如图 9 所示的奇数势偶等价覆盖. 不难验证 $|P| = (1 + 2 + \cdots + n/2) \times 2 + n/2 + 1 = (2m+1)^2$ 为奇数. 最后, 当 $n = 4m+2$, $m \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, 我们可以由归纳得到 $D(n)$ 的 σ 全一问题的一个详细解法. 当 $m = 0$ 即 $n = 2$ 时, 如图 10(a) 所示 X_0 是 $D(2)$ 的 σ 全一问题的一个解法. 当 $m = 1$ 即 $n = 6$ 时, 如图 10(b) 所示 X_1 是 $D(6)$ 的 σ 全一问题的一个解法. 类似的, 下面我们将证明 $D(n)(n = 4m+2)$ 的 σ 全一问题有类似如图 10 所示的解法. 我们对 m 进行归纳证明.



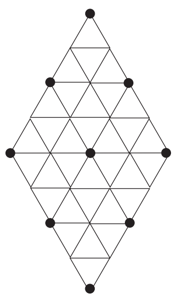
(a) ($n=1$) (b) ($n=3$) (c) ($n=5$) (d) ($n=7$)

图 8 $D(n=2k+1)$ 的奇数势偶等价覆盖

当 $m \le h$ 时, $D(n)$ 的 σ 全一问题有解. 当 $m=h$ 时, 设 X_h 为 $D(4h+2)$ 的解法. 当 $m=h+1$, 即 $n=4m+2=4(h+1)+2$, 我们可以从 X_h 得到 X_{h+1}. 即在 $D(4h+2)$ 的中间延拓两个四行可以得到 $D(4(h+1)+2)$ 即 $D(4h+6)$. 此过程类似于从 $D(2)$ 到 $D(6)$ 的过程. 因此 $D(4(h+1)+2)$ 有类似于图 10 的解 X_{h+1}.

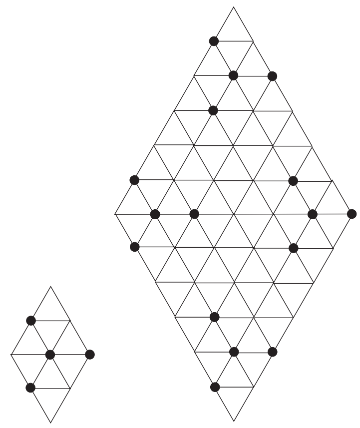
图 $D(n)(n=4m+2)$ 中的每一个顶点都与 X_m 中的奇数个顶点相邻, 由定理 1.2, 我们可以得到 $D(n)(n=4m+2)$ 有解 X_m.

综上所述, $D(n)$ 的 σ 全一问题无解当且仅当 (1) 或 (2) 成立.



($n=4$)

图 9 $D(n=4m)$ 的奇数势偶等价覆盖



(a) ($n=2$) (b) ($n=6$)

图 10 $D(n=4m+2)$ 的解 X_m

4 以正六边形为边界的三角格

以正六边形为边界的三角格 $H(n)$ 是如图 11 所示的正六边形的一个三角形剖分. 以正六边形为边界的三角格 $H(n)$ 的 H- 三角层是指在同一水平线上的三角形的集合. $H(n)$ 的 H- 三角层分别记为 $\{L_1, L_2, \cdots, L_n, L_{n+1}, \cdots, L_{2n}\}$, 如图 11 所示按从顶部到底部的顺序. $H(n)$ 的 H- 三角层数为 $2n$.

顶点层的定义类似上面三角层的定义, 即对于位于同一水平层顶点的集合定义为菱形边界的三角格的 H- 顶点层, 以正六边形为边界的三角格的 H- 顶点层数为 $2n+1$. 如图所示按从顶部到底部的顺序记为 $\{l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1}, \cdots, l_{2n+1}\}$. 对于以正六边形为边界的三角格, l_{ij} 为 (i,j) 位置上的顶点, 记 l_i 为第 i 层的顶点集. 从图 11 易知 $1 \leq j \leq n+i$ 当 $1 \leq i \leq n+1$ 和 $1 \leq j \leq 2n+2-i$ 当 $n+2 \leq i \leq 2n+1$.

定理 4.1　以正六边形为边界的三角格 $H(n)$ 的 σ 全一问题无解 $\Leftrightarrow$

(1) $n = 2k, k \in \{1, 2, \cdots\}$ 或 (2) $n = 4m+3, m \in \{0, 1, 2, \cdots\}$.

证明　由定理 1.1, 我们只需证明 $H(n)$ 有奇数势偶等价覆盖当且仅当 (1) 或 (2) 成立.

当 $n = 2k, k \in \{1, 2, \cdots\}$ 时, $H(n)$ 有奇数势偶等价覆盖. 我们可以由归纳得到结果.

当 $k = 1$ 即 $n = 2$ 时, $H(n)$ 的一个奇数势偶等价覆盖 P_1 如图 12(a) 所示. $|P_1| = 7$.

当 $k = 2$ 即 $n = 4$ 时, $H(n)$ 的一个奇数势偶等价覆盖 P_2 如图 12(b) 所示. $|P_2| = 19$.

观察可知 $P_k - P_{k-1} = 6k$. 类似的, 我们可以从 $H(2k)$ 分别向六边拓展两行得到 $H(2k+2)$ 的偶等价覆盖. 由归纳得 $|P_k| = 3k(k+1)+1$ 为奇数.

接着, 我们来证明当 $n = 4m+3, m \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ 时 $H(n)$ 同样也存在类似如图 13 所示的奇数势偶等价覆盖.

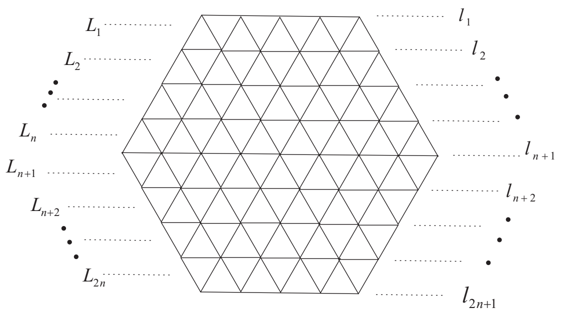
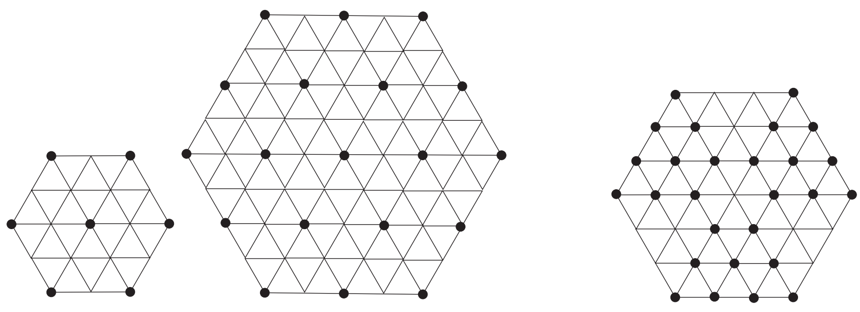


图 11　以正六边形为边界的三角格 $H(n)$



(a) $(n=2)$　(b) $(n=4)$　$(n = 3)$

图 12　$H(n=2k)$ 的奇数势偶等价覆盖　　图 13　$H(n=4m+3)$ 的奇数势偶等价覆盖

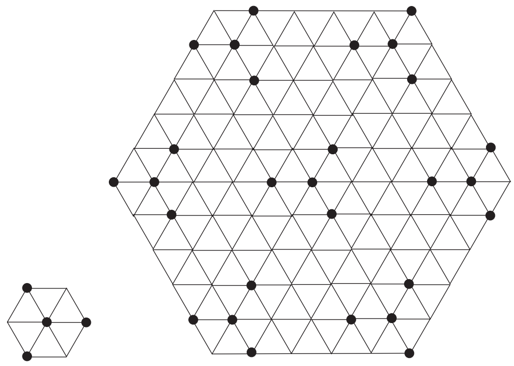
当 $m = 0$ 即 $n = 3$ 时, 有 $H(3)$ 如图所示的奇数势偶等价覆盖 P_0, $|P_0| = 3\times(2+3+4) = 27$ 为奇数. 由正六边形的对称性, 可以分别向六边拓展得到 $H(7)$, $H(11)$,$\cdots$ 的奇数势偶等价覆

盖. 易从图归纳可知 $|P_m| = 3 \times [2+3+4\cdots+(n+1)] = 3(4m+3)(2m+3)$ 为奇数, 即 P_m 为 $H(4m+3)$ 的一个奇数势偶等价覆盖. 由定理 1.1 逆命题得, 当 $n = 4m+3$, $m \in \{0,1,2,\cdots\}$ 时, $H(n)$ 无解.

最后, 当 $n = 4m+1$, $m \in \{0,1,2,\cdots\}$, 我们可以由归纳得到 $H(n)$ 的 σ 全一问题的一个详细解法.

当 $m = 0$ 即 $n = 1$ 时, 如图 14(a) 所示 X_0 是 $H(1)$ 的 σ 全一问题的一个解法. 当 $m = 2$ 即 $n = 5$ 时, 如图 14(b) 所示 X_1 是 $H(5)$ 的 σ 全一问题的一个解法. 类似的, 下面我们将证明 $H(n)(n = 4m+1)$ 的 σ 全一问题有类似于图 14 所示的解法. 我们对 m 进行归纳证明.

当 $m \le h$ 时, $H(n)$ 的 σ 全一问题有解. 当 $m = h$ 时, 设 X_h 为 $H(4h+1)$ 的奇等价覆盖即解. 当 $m = h+1$, 即 $n = 4m+1 = 4(h+1)+1$, 我们可以从 X_h 得到 X_{h+1}. 即 $H(4h+1)$ 分别向六边延拓四行可以得到 $H(4(h+1)+1)$ 即 $H(4h+5)$. 因此 $H(4m+1)H(4(h+1)+1)$ 有类似如图 14(b) 所示的解 X_{h+1}.



(a) $(n=1)$ (b) $(n=5)$

图 14 $H(n = 4m+1)$ 的解 X_m

$H(n)(n = 4m+1)$ 中的每一个顶点都与 X_m 中的奇数个顶点相邻, 由定理 1.2, 我们可以得到 $H(n)(n = 4m+1)$ 有解 X_m.

综上所述, $H(n)$ 的 σ 全一问题无解当且仅当 (1) 或 (2) 成立.

参考文献

[1] Sutner K. Prbolem 88-8[J]. Math. Intelligencer,1998,10(3):101 .

[2] Peled U. Problem 10197[J]. Amer. Math. Monthly,1992,99(2): 162.

[3] Sutner K. Linear cellular automata and the Garden-of-Eden[J]. Math. Intelligencer,1989,11:49-53.

[4] Lossers O P. Solution to problem 10197[J]. Amer. Math. Monthly,1993,100(8):806-807.

[5] Eriksson H, Eriksson K, Sjöstrand J. Note on the lamp lighting problem[J]. Adv. in Appl. Math.,2001,27:357-366.

[6] Chen W Y, Li X, Wang C, et al. The minimum all-ones problem for trees[J]. SIAM J.Computing, 2004,33:379-392.

[7] Downey R G, Fellows M R, Vary A, et al. The parametrized complexity of some fundmental problems in coding theory[J]. SIAM J.Comput,1999,29:545-570.

σ all-ones problem on triangular grids

PING Zheng [1], QIAN Jian-guo [2], LIN Qi-fa [1]

(1. Department of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde 352100, China;
2. School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper we study the σ all-ones problem for some triangular grids. And we give a sufficient and necessary condition of σ all-ones problem for the triangular grids bounded on the triangular, tetragon and regular hexagon to have no solution by mathematical induction and graph theory, respectively. And we give detailed solutions in proofs when having solutions.

Key words: σ all-ones problem, even parity cover, odd set, triangular grids
2000MSC: 05C99

(上接第 99 页)

Some research on solutions of the operator equation $Nx = \delta Lx$

LUO Lei, ZHU Chuan-xi

(Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

Abstract: In this paper, the zero indicator operator L- and completely continuous operator equation $Nx = \delta Lx$ is studied by virtue of multiple topological degree and some inequalities. Meanwhile, some new theorems are obtained and some important conclusions are generalized. And that some new results are applied to some special differential equation.

Key words: multiple topological degree, L- completely continuous, Fredholm operator,homotopy invariance
2000 MSC: 47H10, 60H25